Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет
Факультет Технической Кибернетики
Кафедра Информационных и Управляющих Систем

Расчетное задание №4

«Дифференциальные системы»

по численному анализу

вариант 7

Работу выполнил студент:

Голубева А. С.
гр. 3084/1

Преподаватель:

Зимницкий В. А.

Санкт-Петербург
2005

Задание.

Задана линейная дифференциальная система и поставлена задача Коши:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -41 & -11 & -1 \\ 42 & -4 & -4 \\ -18 & -16 & -28 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} -28 \\ 54 \\ 54 \end{pmatrix}, \qquad z(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Построить характеристическое уравнение и найти собственные числа и правые и левые собственные векторы матрицы. Получить аналитическое решение системы в виде разложения по биортогональной системе собственных векторов.

1. Построение характеристического уравнения и нахождение собственных чисел матрицы.

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0\text{, где } E \text{ – единичная матрица}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -41-\lambda & -11 & -1 \\ 42 & -4-\lambda & -4 \\ -18 & -16 & -28-\lambda \end{vmatrix}$$

Вычисляю определитель:

$$\det(A - \lambda E) = (-41-\lambda)(-4-\lambda)(-28-\lambda) + (-11)(-4)(-18) + 42(-16)(-1) -$$
$$-(-1)(-4-\lambda)(-18) - (-41-\lambda)(-4)(-16) - 42(-11)(-28-\lambda) = -\lambda^3 - 73\lambda^2 - 1804\lambda + 14052$$

Получаю кубическое уравнение:

$$\lambda^3 + 73\lambda^2 + 1804\lambda + 14952 = 0$$

Его решение:

$$\lambda^3 + 21\lambda^2 + 52\lambda^2 + 712\lambda + 1092\lambda + 14952 = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 + 52\lambda + 712) + 21(\lambda^2 + 52\lambda + 712) = 0$$
$$(\lambda + 21)(\lambda^2 + 52\lambda + 712) = 0$$

Получаю один вещественный корень и комплексно-сопряженную пару:

$$\lambda_1 = -21$$
$$\lambda_{2,3} = -26 \pm 6i$$

Корни этого уравнения и есть собственные числа матрицы.

2. Нахождение собственных векторов матрицы и аналитическое решение системы.

- *Формула для получения аналитического решения системы.*

$$z(t)=\sum_{i=1}^{3} z_i(t), \text{ где}$$

$$z_i(t)=\left(e^{At}z_0+\int_0^t e^{A\tau}\varphi(t-\tau)d\tau\right)u_i=\left(e^{\lambda_i t}(z_0,\tilde{v}_i)+\int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)}(\varphi(\tau),\tilde{v}_i)d\tau\right)u_i=$$

$$=\left(e^{\lambda_i t}(z_0,\tilde{v}_i)+\frac{(\varphi(t),\tilde{v}_i)(e^{\lambda_i t}-1)}{\lambda_i}\right)u_i$$

- *Собственные векторы и решение* $z_1(t)$ *для корня* $\lambda_1=-21$.

Система для нахождения правого собственного вектора:

$$u_1(A-\lambda_1 E)=0$$

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}-20 & -11 & -1\\ 42 & 17 & -4\\ -18 & -16 & -7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-20u_{11}-11u_{12}-u_{13}=0\\ 42u_{11}+17u_{12}-4u_{13}=0\\ -18u_{11}-16u_{12}-7u_{13}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_{13}=-20u_{11}-11u_{12}\\ 42u_{11}+17u_{12}-4(-20u_{11}-11u_{12})=0\\ -18u_{11}-16u_{12}-7(-20u_{11}-11u_{12})=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_{13}=-20u_{11}-11u_{12}\\ 122u_{11}+61u_{12}=0\\ 122u_{11}+61u_{12}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_{13}=-20u_{11}+22u_{11}=2u_{11}\\ u_{12}=-\dfrac{122}{61}u_{11}=-2u_{11}\\ u_{11}=1\end{cases}$$

Правый собственный вектор:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}u_{11}$$

Система для нахождения левого собственного вектора:

$$v_1(A^T-\lambda_1 E)=0$$

$$A^T-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}-20 & 42 & -18\\ -11 & 17 & -16\\ -1 & -4 & -7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -20v_{11}+42v_{12}-18v_{13}=0 \\ -11v_{11}+17v_{12}-16v_{13}=0 \\ -v_{11}-4v_{12}-7v_{13}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{11}=-4v_{12}-7v_{13} \\ 20(4v_{12}+7v_{13})+42v_{12}-18v_{13}=0 \\ 11(4v_{12}+7v_{13})+17v_{12}-16v_{13}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{11}=-4v_{12}-7v_{13} \\ 122v_{12}+122v_{13}=0 \\ 61v_{12}+61v_{12}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{11}=4v_{13}-7v_{13}=-3v_{13} \\ v_{12}=-v_{13} \\ v_{13}=1 \end{cases}$$

Правый собственный вектор:

$$v_1=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v_{13}$$

Чтобы получить решение $z_1(t)$ найду скалярные произведения из указанной ранее формулы:

$$\tilde{v}_1=\frac{v_1}{(u_1,v_1)}$$

$$(u_1,v_1)=u_{11}v_{11}+u_{12}v_{12}+u_{13}v_{13}=-3+2+2=1$$

$$\tilde{v}_1=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(z_0,\tilde{v}_1)=z_{01}\tilde{v}_{11}+z_{02}\tilde{v}_{12}+z_{03}\tilde{v}_{13}=6+1=7$$

$$(\varphi(t),\tilde{v}_1)=\varphi_1\tilde{v}_{11}+\varphi_2\tilde{v}_{12}+\varphi_3\tilde{v}_{13}=84-54+54=84$$

Тогда получаю:

$$z_1(t)=\left(7e^{-21t}+\frac{84(e^{-21t}-1)}{-21}\right)u_1=(7e^{-21t}-4e^{-21t}+4)u_1=$$

$$=(3e^{-21t}+4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}e^{-21t}$$

- *Собственные векторы и решение $z_2(t)$ для корня $\lambda_2=-26+6i$.*

Система для нахождения правого собственного вектора:

$$u_2(A-\lambda_2E)=0$$

$$A-\lambda_2E=\begin{pmatrix} -15-6i & -11 & -1 \\ 42 & 22-6i & -4 \\ -18 & -16 & -2-6i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -(15+6i)u_{21} - 11u_{22} - u_{23} = 0 \\ 42u_{21} + (22-6i)u_{22} - 4u_{23} = 0 \\ -18u_{21} - 16u_{22} - (2+6i)u_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{23} = -(15+6i)u_{21} - 11u_{22} \\ 42u_{21} + (22-6i)u_{22} + 4((15+6i) + 11u_{22}) = 0 \\ -18u_{21} - 16u_{22} + (2+6i)((15+6i) + 11u_{22}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{23} = -(15+6i)u_{21} - 11u_{22} \\ (102+24i)u_{21} + (66-6i)u_{22} = 0 \\ (-24+102i)u_{21} + (6+66i)u_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{23} = -(15+6i)(-0.6+0.2i)u_{22} - 11u_{22} = (-0.8+0.6i)u_{22} \\ u_{21} = -\dfrac{66-6i}{102+24i}u_{22} = -\dfrac{6+66i}{-24+102i}u_{22} = (-0.6+0.2i)u_{22} \\ u_{22} = 1 \end{cases}$$

Правый собственный вектор:

$$u_2 = \begin{pmatrix} -0.6+0.2i \\ 1 \\ -0.8+0.6 \end{pmatrix} u_{22} = \begin{pmatrix} -3+i \\ 5 \\ -4+3i \end{pmatrix} u_{22}$$

Система для нахождения левого собственного вектора:

$$v_2(A^T - \lambda_2 E) = 0$$

$$A^T - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -15-6i & 42 & -18 \\ -11 & 22-6i & -16 \\ -1 & -4 & -2-6i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (-15-6i)v_{21} + 42v_{22} - 18v_{23} = 0 \\ -11v_{21} + (22-6i)v_{22} - 16v_{23} = 0 \\ -v_{21} - 4v_{22} - (2+6i)v_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{21} = -4v_{22} - (2+6i)v_{23} \\ (15+6i)(4v_{22} + (2+6i)v_{23}) + 42v_{22} - 18v_{23} = 0 \\ 11(4v_{22} + (2+6i)v_{23}) + (22-6i)v_{22} - 16v_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{21} = -4v_{22} - (2+6i)v_{23} \\ (102+24i)v_{22} + (-24+102i)v_{23} = 0 \\ (66-6i)v_{22} + (6+66i)v_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{21} = -4v_{22} - i(2+6i)v_{22} = (2-2i)v_{22} \\ v_{23} = -\dfrac{66-6i}{6+66i}v_{22} = \dfrac{102+24i}{-24+102i}v_{22} = iv_{22} \\ v_{22} = 1 \end{cases}$$

Левый собственный вектор:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2-2i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} v_{22}$$

Скалярные произведения для $z_2(t)$:

$$\widetilde{v}_2 = \frac{v_2}{(v_2, u_2)}$$

$$(u_2, v_2) = u_{21}v_{21} + u_{22}v_{22} + u_{23}v_{23} = (-3+i)(2-2i) + 5 + i(-4+3i) = 2+4i$$

$$\frac{1}{(v_2, u_2)} = \frac{1}{-2+4i} = -0.1 - 0.2i$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.6-0.2i \\ -0.1-0.2i \\ 0.2-0.1i \end{pmatrix}$$

$$(z_0, \tilde{v}_2) = z_{01}\tilde{v}_{21} + z_{02}\tilde{v}_{22} + z_{03}\tilde{v}_{23} = -2(-0.6-0.2i) - (-0.1-0.2i) = 1.3+0.6i$$

$$(\varphi(t), \tilde{v}_2) = \varphi_1\tilde{v}_{21} + \varphi_2\tilde{v}_{22} + \varphi_3\tilde{v}_{23} = -28(-0.6-0.2i) + 54(-0.1-0.2i) + 54(0.2-0.1i) = 22.2-10.6i$$

Решение $z_2(t)$:

$$z_2(t) = \left(e^{(-26+6i)t}(1.3+0.6i) + \frac{(22.2-10.6i)\left(e^{(-26+6i)t}-1\right)}{-26+6i}\right)u_2 = \left((1.3+0.6i)e^{(-26+6i)t} + (-0.9+0.2i)e^{(-26+6i)t} + (0.9-0.2i\right.$$

$$= \left((0.4+0.8i)e^{(-26+6i)t} + (0.9-0.2i)\right)\begin{pmatrix} -3+i \\ 5 \\ 4+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5+1.5i \\ 4.5-i \\ -3+3.5i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-2i \\ 2+4i \\ -4-2i \end{pmatrix} e^{(-26+6i)t}$$

- *Собственные векторы и решение $z_3(t)$ для корня $\lambda_3 = -26-6i$.*

Система для нахождения правого собственного вектора:

$$u_3(A - \lambda_3 E) = 0$$

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -15+6i & -11 & -1 \\ 42 & 22+6i & -4 \\ -18 & -16 & -2+6i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (-15+6i)u_{31} - 11u_{32} - u_{33} = 0 \\ 42u_{31} + (22+6i)u_{32} - 4u_{33} = 0 \\ -18u_{31} - 16u_{32} + (-2+6i)u_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{33} = (-15+6i)u_{31} - 11u_{32} \\ 42u_{31} + (22+6i)u_{32} - 4((-15+6i)u_{31} - 11u_{32}) = 0 \\ -18u_{31} - 16u_{32} + (-2+6i)((-15+6i)u_{31} - 11u_{32}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{33} = (-15+6i)u_{31} - 11u_{32} \\ (102-24i)u_{31} + (66+6i)u_{32} = 0 \\ -(24+102i)u_{31} + (6-66i)u_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{33} = (-15+6i)(-0.6-0.2i)u_{32} - 11u_{32} = (-0.8-0.6i)u_{32} \\ u_{31} = -\dfrac{66+6i}{102-24i}u_{32} = \dfrac{6-66i}{24+102i}u_{33} = (-0.6-0.2i)u_{32} \\ u_{32} = 1 \end{cases}$$

Правый собственный вектор:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -0.6-0.2i \\ 1 \\ -0.8-0.6i \end{pmatrix} u_{32} = \begin{pmatrix} -3-i \\ 5 \\ -4-3i \end{pmatrix} u_{32}$$

Система для нахождения левого собственного вектора:

$$v_3(A^T - \lambda_3 E) = 0$$

$$A^T - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -15+6i & 42 & -18 \\ -11 & 22+6i & -16 \\ -1 & -4 & -2+6i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}(-15+6i)v_{31}+42v_{32}-18v_{33}=0\\ -11v_{31}+(22+6i)v_{32}-16v_{33}=0\\ -v_{31}-4v_{32}+(-2+6i)v_{33}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_{31}=-4v_{32}+(-2+6i)v_{33}\\ (-15+6i)(-4v_{32}+(-2+6i)v_{33})+42v_{32}-18v_{33}=0\\ -11(-4v_{32}+(-2+6i)v_{33})+(22+6i)v_{32}-16v_{33}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_{31}=-4v_{32}+(-2+6i)v_{33}\\ (102-24i)v_{32}-(24+102i)v_{33}=0\\ (66+6i)v_{32}+(6-66i)v_{33}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_{31}=-4v_{32}-i(-2+6i)v_{32}=(2+2i)v_{32}\\ v_{23}=-\dfrac{66+6i}{6-66i}v_{32}=\dfrac{102-24i}{24+102i}v_{32}=-iv_{32}\\ v_{32}=1\end{cases}$$

Левый собственный вектор:

$$v_3=\begin{pmatrix}2+2i\\1\\-i\end{pmatrix}v_{32}$$

Скалярные произведения для $z_3(t)$:

$$\widetilde{v}_3=\frac{v_3}{(v_3,u_3)}$$

$$(u_3,v_3)=u_{31}v_{31}+u_{32}v_{32}+u_{33}v_{33}=(-3-i)(2+2i)+5-i(-4-3i)=-2-4i$$

$$\frac{1}{(v_3,u_3)}=\frac{1}{-2-4i}=-0.1+0.2i$$

$$\widetilde{v}_3=\begin{pmatrix}-0.6+0.2i\\-0.1+0.2i\\0.2+0.1i\end{pmatrix}$$

$$(z_0,\widetilde{v}_3)=z_{01}\widetilde{v}_{31}+z_{02}\widetilde{v}_{32}+z_{03}\widetilde{v}_{33}=-2(-0.6+0.2i)-(-0.1+0.2i)=1.3-0.6i$$

$$(\varphi(t),\widetilde{v}_3)=\varphi_1\widetilde{v}_{31}+\varphi_2\widetilde{v}_{32}+\varphi_3\widetilde{v}_{33}=-28(-0.6+0.2i)+54(-0.1+0.2i)+54(0.2+0.1i)=22.2+10.6i$$

Решение $z_3(t)$:

$$z_2(t)=\left(e^{(-26-6i)t}(1.3-0.6i)+\frac{(22.2+10.6i)\left(e^{(-26-6i)t}-1\right)}{-26-6i}\right)u_3=\left((1.3-0.6i)e^{(-26-6i)t}-(0.9+0.2i)e^{(-26-6i)t}+0.9+0.2i\right)=$$

$$=\left((0.4-0.8i)e^{(-26-6i)t}+0.9+0.2i\right)\begin{pmatrix}-3-i\\5\\-4-3i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.5-1.5i\\4.5+i\\-3-3.5i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2+2i\\2-4i\\-4+2i\end{pmatrix}e^{(-26-6i)t}$$

- *Аналитическое решение системы.*

$$z(t)=z_1(t)+z_2(t)+z_3(t)$$

$$z(t)=\begin{pmatrix}4\\-8\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}e^{-21t}+\begin{pmatrix}-2.5+1.5i\\4.5-i\\-3+3.5i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2-2i\\2+4i\\-4-2i\end{pmatrix}e^{(-26+6i)t}+\begin{pmatrix}-2.5-1.5i\\4.5+i\\-3-3.5i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2+2i\\2-4i\\-4+2i\end{pmatrix}e^{(-26-6i)t}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}e^{-21t}+\begin{pmatrix}-2-2i\\2+4i\\-4-2i\end{pmatrix}e^{(-26+6i)t}+\begin{pmatrix}-2+2i\\2-4i\\-4+2i\end{pmatrix}e^{(-26-6i)t}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}e^{-21t}+e^{-26i}\left(\begin{pmatrix}-2-2i\\2+4i\\-4-2i\end{pmatrix}e^{6it}+\begin{pmatrix}-2+2i\\2-4i\\-4+2i\end{pmatrix}e^{-}\right.$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}e^{-21t}+e^{-26t}\left(\begin{pmatrix}-2-2i\\2+4i\\-4-2i\end{pmatrix}(\cos 6t+i\sin 6t)+\begin{pmatrix}-2+2i\\2-4i\\-4+2i\end{pmatrix}(\cos(-6t)+i\sin(-6t))\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}e^{-21t}+e^{-26t}\left(\begin{pmatrix}-4\\4\\-8\end{pmatrix}\cos 6t+\begin{pmatrix}4\\-8\\4\end{pmatrix}\sin 6t\right)$$

Ответ:

$$z(t)=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}e^{-21t}+e^{-26t}\left(\begin{pmatrix}-4\\4\\-8\end{pmatrix}\cos 6t+\begin{pmatrix}4\\-8\\4\end{pmatrix}\sin 6t\right)$$

Дополнение к расчетному заданию №4.

Определение критического шага из уравнения:

$$\left|1+h\lambda+\frac{h^2\lambda^2}{2}\right|=1$$

Для вещественных λ получаю следующую систему:

$$\begin{cases}1+h\lambda+\dfrac{(h\lambda)^2}{2}=1\\[2ex]1+h\lambda+\dfrac{(h\lambda)^2}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h\lambda+\dfrac{(h\lambda)^2}{2}=0\\[2ex]h\lambda+\dfrac{(h\lambda)^2}{2}+2=0\end{cases}$$

Введу замену переменной $h\lambda=x$ для второго уравнения:

$$\begin{cases}h\left(\lambda+\dfrac{h\lambda^2}{2}\right)=0\\[2ex]0.5x^2+x+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h_1=0\quad h_2=-\dfrac{2\lambda}{\lambda^2}=-\dfrac{2}{\lambda}\\[2ex]x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}i=\lambda h_{3,4}\end{cases}$$

Получаю корни:

$$h_1=0$$

$$h_2=-\frac{2\lambda}{\lambda^2}=-\frac{2}{\lambda}$$

$$h_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{\lambda}$$

При $\lambda_1=-21$ шаг $h=\dfrac{2}{21}$

Для комплексных $\lambda=-26\pm 6i$ получаю:

$$\left|1+h(-26\pm 6i)+\frac{h^2(-26\pm 6i)^2}{2}\right|=1$$

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1$, где

α и β - вещественная и мнимая части исходного выражения соответственно.

$$\sqrt{126736h^4-18512h^3+1352h^2-52h+1}=1$$

Возведу все в квадрат:

$$126736h^4-18512h^3+1352h^2-52h+1=1$$

$$h\left(126736h^3-18512h^2+1352h-52\right)=0$$

Корни:

$$h_1=0$$

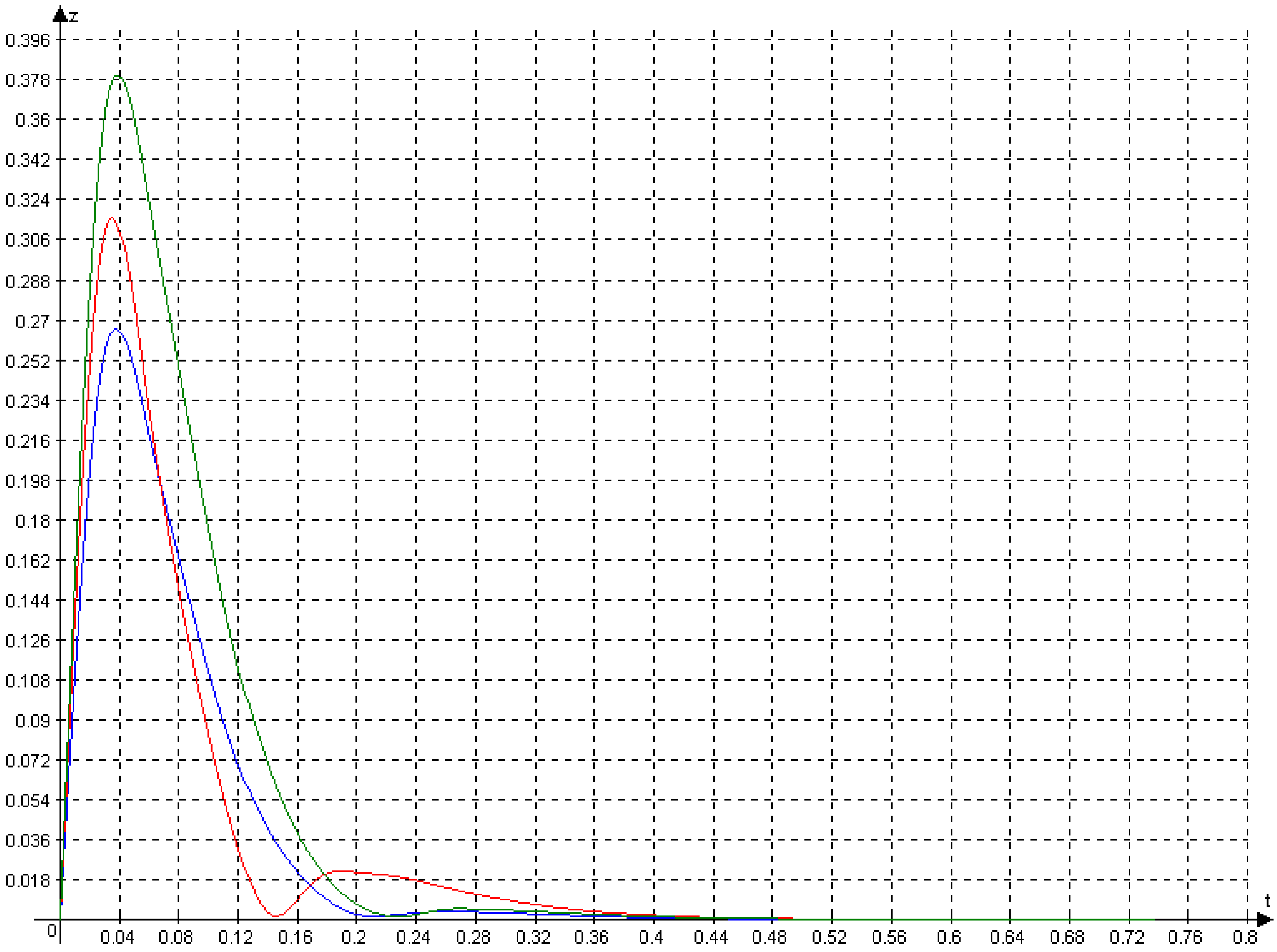
$$h_2\cong 0.07672$$

$$h_{3,4}\cong 0.035\pm 3744i$$

При $\lambda=-26\pm 6i$ шаг $h\cong 0.07672$

Сравнительная таблица результатов.

№	t	заданный метод			RKF45				аналитическое решение			погрешность метода		
		z1	z2	z3	z1	z2	z3	IFLAG	z1	z2	z3	Δz1	Δz2	Δz3
1	0,0000	-2,000000	-1,000000	0,000000	-2,000000	-1,000000	0,000000	2	-2,000000	-1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,0284	-1,156092	-0,766940	1,509389	-0,907507	-1,069347	1,860868	2	-0,907498	-1,069341	1,860885	0,248585	0,302407	0,351479
3	0,0568	-0,872696	-0,327340	2,069123	-0,645551	-0,570339	2,403520	2	-0,645551	-0,570339	2,403520	0,227145	0,242999	0,334397
4	0,0852	-0,815052	0,080792	2,225633	-0,665797	-0,049478	2,454743	2	-0,665798	-0,049470	2,454742	0,149255	0,130270	0,229110
5	0,1136	-0,836495	0,393902	2,227522	-0,754330	0,346453	2,359808	2	-0,686361	0,065216	2,436801	0,082165	0,047449	0,132286
6	0,1419	-0,876938	0,613250	2,181963	-0,838407	0,611058	2,248078	2	-0,838408	0,611062	2,248077	0,038531	0,002192	0,066115
7	0,1703	-0,914578	0,758923	2,131221	-0,900309	0,775727	2,158672	2	-0,900309	0,775727	2,158672	0,014269	0,016804	0,027451
8	0,1987	-0,943534	0,852329	2,089205	-0,941026	0,873625	2,096753	2	-0,941027	0,873626	2,096752	0,002508	0,021296	0,007548
9	0,2271	-0,963875	0,910752	2,058367	-0,966129	0,930006	2,057074	2	-0,966129	0,930006	2,057074	0,002254	0,019254	0,001293
10	0,2555	-0,977422	0,946628	2,037182	-0,980965	0,961733	2,032862	2	-0,980965	0,961734	2,032862	0,003543	0,015105	0,004320
11	0,2839	-0,986133	0,968351	2,023223	-0,989475	0,979280	2,018580	2	-0,989475	0,979280	2,018580	0,003342	0,010929	0,004643
12	0,3123	-0,991597	0,981360	2,014287	-0,994252	0,988859	2,010360	2	-0,994252	0,988859	2,010359	0,002655	0,007499	0,003927
13	0,3407	-0,994961	0,989082	2,008686	-0,996889	0,994038	2,005715	2	-0,996889	0,994038	2,005715	0,001928	0,004956	0,002971
14	0,3691	-0,997004	0,993634	2,005231	-0,998327	0,996818	2,003128	2	-0,998327	0,996818	2,003128	0,001323	0,003184	0,002103
15	0,3975	-0,998231	0,996301	2,003126	-0,999104	0,998303	2,001702	2	-0,999104	0,998303	2,001702	0,000873	0,002002	0,001424
16	0,4258	-0,998961	0,997857	2,001856	-0,999522	0,999095	2,000922	2	-0,999522	0,999095	2,000922	0,000561	0,001238	0,000934
17	0,4542	-0,999393	0,998762	2,001096	-0,999745	0,999517	2,000498	2	-0,999745	0,999517	2,000498	0,000352	0,000755	0,000598
18	0,4826	-0,999646	0,999285	2,000645	-0,999864	0,999741	2,000269	2	-0,999864	0,999741	2,000269	0,000218	0,000456	0,000376
19	0,5110	-0,999795	0,999588	2,000378	-0,999927	0,999861	2,000145	2	-0,999927	0,999861	2,000145	0,000132	0,000273	0,000233
20	0,5394	-0,999881	0,999763	2,000221	-0,999961	0,999925	2,000078	2	-0,999961	0,999925	2,000078	0,000080	0,000162	0,000143
21	0,5678	-0,999931	0,999864	2,000129	-0,999979	0,999960	2,000042	2	-0,999979	0,999960	2,000042	0,000048	0,000096	0,000087
22	0,5962	-0,999960	0,999922	2,000075	-0,999989	0,999978	2,000023	2	-0,999989	0,999978	2,000023	0,000029	0,000056	0,000052
23	0,6246	-0,999977	0,999955	2,000044	-0,999994	0,999988	2,000012	2	-0,999994	0,999988	2,000012	0,000017	0,000033	0,000032
24	0,6530	-0,999987	0,999974	2,000025	-0,999997	0,999993	2,000007	2	-0,999997	0,999993	2,000007	0,000010	0,000019	0,000018
25	0,6813	-0,999992	0,999985	2,000015	-0,999998	0,999996	2,000004	2	-0,999998	0,999996	2,000004	0,000006	0,000011	0,000011
26	0,7097	-0,999996	0,999991	2,000008	-0,999999	0,999998	2,000002	2	-0,999999	0,999998	2,000002	0,000003	0,000007	0,000006
27	0,7381	-0,999997	0,999995	2,000005	-0,999999	0,999999	2,000001	2	-0,999999	0,999999	2,000001	0,000002	0,000004	0,000004


z
t
0
0.396
0.378
0.36
0.342
0.324
0.306
0.288
0.27
0.252
0.234
0.216
0.198
0.18
0.162
0.144
0.126
0.108
0.09
0.072
0.054
0.036
0.018
0.04
0.08
0.12
0.16
0.2
0.24
0.28
0.32
0.36
0.4
0.44
0.48
0.52
0.56
0.6
0.64
0.68
0.72
0.76
0.8