Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет
Факультет Технической Кибернетики
Кафедра Информационных и Управляющих Систем

Расчетное задание №2
«Решение линейных разностных уравнений»
по численному анализу

Работу выполнил студент:

Голубева А. С.
гр. 3084/1

Преподаватель:

Земницкий В. А.

Санкт-Петербург
2004

Задание.

Дифференциальное уравнение:

$y''(t) - 9y'(t) + 14y(t) = t - 1, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 1$

и разностное уравнение:

$x(k+2) - 9x(k+1) + 14x(k) = k - 1, \quad x(0) = 2, x(1) = 1$

решить в скалярной форме.

1. Решение дифференциального уравнения.

$y''(t) - 9y'(t) + 14y(t) = t - 1, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 1$

- **Общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов.**

Общее однородное уравнение:

$y''(t) - 9y'(t) + 14y(t) = 0.$

Характеристическое уравнение:

$\alpha^2 - 9\alpha + 14 = 0$

Его корни:

$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 7$

Решение общего однородного уравнения:

$y_{o.o} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{7t}$

Для решения частного неоднородного уравнения представлю $t - 1 = e^{0t}(t-1)$. Ни один из корней характеристического уравнения не равен нулю (число перед степенью t). Полином $P(t) = t - 1$ является полиномом первой степени. Значит, решение буду искать в виде:

$y_{ч.н} = at + b$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты a и b, подставлю в исходное уравнение выражения для $y_{ч.н}, \quad y'_{ч.н}, \quad y''_{ч.н}$ и учту, что уравнение обратится в тождество.

$y''_{ч.н}(t) - 9y'_{ч.н}(t) + y_{ч.н}(t) = t - 1$

$y_{ч.н} = at + b$

$y'_{ч.н.} = a$

$y''_{ч.н.} = 0$

Тогда:

$0 - 9a + 14(at + b) = t - 1$

$14at + 14b - 9a = t - 1$

Приравниваю коэффициенты при t^0 и t^1:

$$\begin{cases} t^1 : 14a = 1 \\ t^0 : 14b - 9a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{14} \\ 14b - \dfrac{9}{14} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{14} \\ b = -\dfrac{5}{196} \end{cases}$$

Таким образом, решение частного неоднородного:

$$y_{ч.н} = \frac{t}{14} - \frac{5}{196}$$

Решение общего неоднородного:

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{7t} + \frac{t}{14} - \frac{5}{196}$$

- **Частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 1$:**

Для нахождения решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, вычислю производную от общего решения неоднородного уравнения и, приравняв начальные данные, найду произвольные постоянные c_1 и c_2.

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{7t} + \frac{t}{14} - \frac{5}{196}$$

$$y'_{о.н} = \frac{1}{14} + 2c_1 e^{2t} + 7c_2 e^{7t}$$

Подставляю начальные данные $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. Образуется система:

$$\begin{cases} -\frac{5}{196} + c_1 + c_2 = 2 \\ \frac{1}{14} + 2c_1 + 7c_2 = 1 \end{cases}$$

Откуда произвольные постоянные:

$$c_1 = \frac{53}{20} = 2{,}65$$

$$c_2 = -\frac{153}{245}$$

Тогда искомое частное решение:

$$y = 2{,}65e^{2t} - \frac{153}{245}e^{7t} + \frac{t}{14} - \frac{5}{196}$$

2. Решение разностного уравнения:

$x(k+2) - 9x(k+1) + 14x(k) = k - 1, \quad x(0) = 2, x(1) = 1$

- **Общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных.**

Общее однородное уравнение:

$x(k+2) - 9x(k+1) + 14x(k) = 0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

Его корни:

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 2$$

Решение общего однородного уравнения:

$$x_{о.о}(k) = c_1 7^k + c_2 2^k$$

Вид частного решения:

$$x_{ч.н}(k) = c_1(k)7^k + c_2(k)2^k$$

Функции $c_1(k)$ и $c_2(k)$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 7^{k+1}\Delta c_1(k) + 2^{k+1}\Delta c_2(k) = 0 \\ 7^{k+2}\Delta c_1(k) + 2^{k+2}\Delta c_2(k) = k - 1 \end{cases}$$

Отсюда функции $c_1(k)$ и $c_2(k)$:

$$\Delta c_1(k) = \frac{k-1}{5} \cdot 7^{-k-1}$$

$$\Delta c_2(k) = -\frac{k-1}{5} \cdot 2^{-k-1}$$

После суммирования этих функций получаю:

$$c_1(k) - c_1(0) = \sum_{\kappa=0}^{k-1} \frac{\kappa - 1}{5} \cdot 7^{-\kappa-1}$$

$$c_2(k) - c_2(0) = \sum_{\kappa=0}^{k-1} \left(-\frac{\kappa - 1}{5} \right) \cdot 2^{-\kappa-1}$$

Частное решение:

$$x_{ч.н.}(k) = \left(\sum_{\kappa=0}^{k-1} \frac{\kappa - 1}{5} \cdot 7^{-\kappa-1} \right) \cdot 7^k + \left(\sum_{\kappa=0}^{k-1} \left(-\frac{\kappa - 1}{5} \right) \cdot 2^{-\kappa-1} \right) \cdot 2^k$$

Решение общего неоднородного:

$$x_{о.н.}(k) = c_1 \cdot 7^k + c_2 \cdot 2^k + \left(\sum_{\kappa=0}^{k-1} \frac{\kappa - 1}{5} \cdot 7^{-\kappa-1} \right) \cdot 7^k + \left(\sum_{\kappa=0}^{k-1} \left(-\frac{\kappa - 1}{5} \right) \cdot 2^{-\kappa-1} \right) \cdot 2^k$$

Обе суммы найду, воспользовавшись формулой Абеля суммирования по частям:

$$\sum_{\kappa=0}^{k-1} \frac{\kappa - 1}{5} \cdot 7^{-\kappa-1} = \frac{1}{35} \sum_{\kappa=0}^{k-1} (\kappa - 1) \cdot 7^{-\kappa} = \frac{1}{35} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \kappa \cdot 7^{-\kappa} - \frac{1}{35} \sum_{\kappa=0}^{k-1} 7^{-\kappa} =$$

$$= \frac{1}{35} \cdot \left(\frac{-7 \cdot 7^{-k} \cdot k}{6} + \frac{7 - 7 \cdot 7^{-k}}{36} \right) - \frac{1}{35} \cdot \frac{-7 \cdot 7^{-k} + 7}{6} = \frac{1 - 7^k}{180} - \frac{7^k \cdot k}{30} - \frac{1 - 7^k}{30} = \frac{7^{-k} - 1}{36} - \frac{k \cdot 7^{-k}}{30}$$

$$\sum_{\kappa=0}^{k-1} \left(-\frac{\kappa - 1}{5} \right) \cdot 2^{-\kappa-1} = \frac{1}{10} \sum_{\kappa=0}^{k-1} 2^{-\kappa} - \frac{1}{10} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \kappa \cdot 2^{-\kappa} = \frac{2 - 2 \cdot 2^{-k}}{10} - \frac{1}{10} \left(-2 \cdot 2^{-k} \cdot k - 2 \cdot 2^{-k} + 2 \right) =$$

$$= \frac{1 - 2^{-k}}{5} + \frac{2^{-k} \cdot k + 2^{-k} - 1}{5} = \frac{2^{-k} \cdot k}{5}$$

В результате получаю:

$$x_{о.н.}(k) = c_1 \cdot 7^k + c_2 \cdot 2^k + \left(\frac{7^{-k} - 1}{36} - \frac{k \cdot 7^{-k}}{30} \right) \cdot 7^k + \frac{2^{-k} \cdot k}{5} \cdot 2^k = c_1 \cdot 7^k + c_2 \cdot 2^k + \frac{1 - 7^k}{36} - \frac{k}{30} + \frac{k}{5}$$

- **Частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 2, x(1) = 1$:**

При подстановке начальных условий в решение общего неоднородного получаю систему для нахождения искомого частного решения:

$$x(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$x(1) = 1 \Rightarrow 7c_1 + 2c_2 + \frac{1 - 7}{36} - \frac{1}{30} + \frac{1}{5} = 1$$

Получилась следующая система:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 7c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда искомые произвольные постоянные:

$$c_1 = -0{,}6$$

$$c_2 = 2{,}6$$

Таким образом, искомое частное решение:

$$x(k) = -0{,}6 \cdot 7^k + 2{,}6 \cdot 2^k + \frac{1 - 7^k}{36} - \frac{k}{30} + \frac{k}{5}$$