Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет
Факультет Технической Кибернетики
Кафедра информационных и управляющих систем

Расчетное задание №1.

по теме

«Интерполяция.»

по численному анализу

вариант 8

Работу выполнил студент:

Голубева А. С.
гр. 3084/1

Преподаватель:

Земницкий В. А.

Санкт-Петербург

2004

Исходные данные.

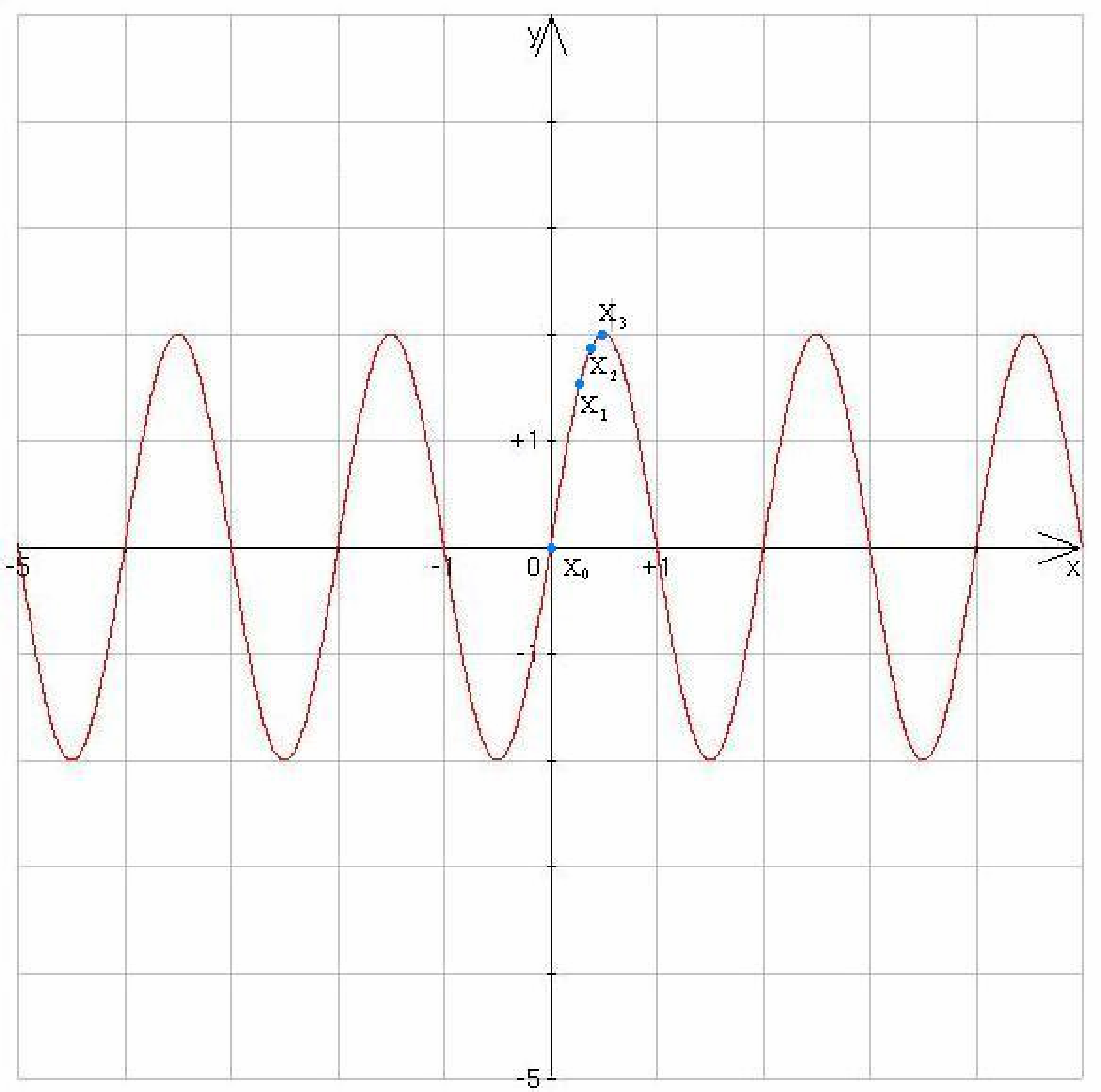
Хорошо известная функция задана следующим фрагментом таблицы.

x	0	1/4	1/3	1/2
f(x)	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

1. Функция.

$f(x) = 2\sin \pi x$

Ее график с нанесенными на него значениями из заданной таблицы:



2. Вычисление оценки остаточного члена.

$$R_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\ n = 3$$

$$R_3(f,x) = \frac{(2\sin \pi\xi)^{IV}}{4!}(x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi^4 \sin \pi\xi}{24}\cdot x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{\pi^4 \sin \pi\xi}{12}\cdot x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

- Для точки $x_1 = \dfrac{1}{5}$:

$$R_3(f, x_1) = \frac{\pi^4 \sin \pi\xi}{12} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = 3{,}333 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^4 \sin \pi\xi$$

- Для точки $x_2 = \dfrac{4}{15}$:

$$R_3(f, x_2) = \frac{\pi^4 \sin \pi\xi}{12} \cdot \frac{4}{15}\left(\frac{4}{15} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{15} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{15} - \frac{1}{2}\right) = 5.761 \cdot 10^{-6} \cdot \pi^4 \sin \pi\xi$$

Максимальное значение синуса: $\max \sin \pi\xi = 1$, тогда оценка будет:

$R_3(f, x_1) < 3{,}247 \cdot 10^{-3}$

$R_3(f, x_2) < 5{,}612 \cdot 10^{-4}$

3. Построение интерполяционных полиномов в форме Лагранжа и Ньютона.

- В форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=o}^{n} f(x_i) \cdot \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$L_3(x) = 0 \cdot \frac{(x - 1/4)(x - 1/3)(x - 1/2)}{(0 - 1/4)(0 - 1/3)(0 - 1/2)} + \sqrt{2} \cdot \frac{4x(x - 1/3)(x - 1/2)}{(1/4 - 1/3)(1/4 - 1/2)} + \sqrt{3} \cdot \frac{3x(x - 1/4)(x - 1/2)}{(1/3 - 1/4)(1/3 - 1/2)} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{2x(x - 1/4)(x - 1/3)}{(1/2 - 1/4)(1/2 - 1/3)} =$$

$$= 4\sqrt{2}x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot 12 - 3\sqrt{3}x\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 12 \cdot 6 + 4x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot 4 \cdot 6 =$$

$$= 192\sqrt{2}x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - 216\sqrt{3}x\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 96x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 192\sqrt{2}x\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right) - 216\sqrt{3}x\left(x^2 - \frac{x}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right) + 96x\left(x^2 - \frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{12}\right) =$$

$$= 192\sqrt{2}x^3 - 96\sqrt{2}x^2 - 64\sqrt{2}x^2 + 32\sqrt{2}x - 216\sqrt{3}x^3 + 54\sqrt{3}x^2 + 108\sqrt{3}x^2 - 27\sqrt{3}x + 96x^3 - 24x^2 - 32x^2 + 8x =$$

$$= 192\sqrt{2}x^3 - 160\sqrt{2}x^2 + 32\sqrt{2}x - 216\sqrt{3}x^3 + 162\sqrt{3}x^2 - 27\sqrt{3}x + 96x^3 - 56x^2 + 8x =$$

$$= (192\sqrt{2} - 216\sqrt{3} + 96)x^3 + (162\sqrt{3} - 160\sqrt{2} - 56)x^2 + (32\sqrt{2} - 27\sqrt{3} + 8)x$$

- В форме Ньютона:

$$N_n^+(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f_i}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f_i}{2h^2} + \ldots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}$$

Таблица разделенных разностей:

x	f	$f(i, i+1)$	$f(i, i+1, i+2)$	$f(i, i+1, i+2, i+3)$
0	0	$4\sqrt{2}$	$12(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$	$24(4 - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{2})$
1/4	$\sqrt{2}$	$12(\sqrt{3} - \sqrt{2})$	$24(2 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$	
1/3	$\sqrt{3}$	$6(2 - \sqrt{3})$		
1/2	2			

При построении интерполяционного полинома в форме Ньютона используется только первая строка таблицы разделенных разностей.

$$N_3^+(x) = 0 + (x-0)\cdot 4\sqrt{2} + (x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot 12(3\sqrt{3}-4\sqrt{2}) + (x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 24(4-9\sqrt{3}+8\sqrt{2}) =$$

$$= 4\sqrt{2}x + 12x(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})\left(x-\frac{1}{4}\right) + 24x(4-9\sqrt{3}+8\sqrt{2})\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}x + 12x\left(3\sqrt{3}x - \frac{3\sqrt{3}}{4} - 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}\right) + 24\left(4x - 9\sqrt{3}x + 8\sqrt{2}x - 1 + \frac{9\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}x + 36\sqrt{3}x^2 - 9\sqrt{3}x - 48\sqrt{2}x^2 + 12\sqrt{2}x + \left(96x^2 - 216\sqrt{3}x^2 + 192\sqrt{2}x^2 - 24x + 54\sqrt{3}x - 48\sqrt{2}x\right)\left(x - 1/3\right) =$$

$$16\sqrt{2}x + 36\sqrt{3}x^2 - 9\sqrt{3}x - 48\sqrt{2}x^2 + 96x^3 - 216\sqrt{3}x^3 + 192\sqrt{2}x^3 - 24x^2 + 54\sqrt{3}x^2 - 48\sqrt{2}x^2 - 32x^2 +$$

$$+ 72\sqrt{3}x^2 - 64\sqrt{2}x^2 + 8x - 18\sqrt{3}x + 16\sqrt{2}x =$$

$$= 32\sqrt{2}x + 162\sqrt{3}x^2 - 27\sqrt{3}x - 160\sqrt{2}x^2 + 96x^3 - 216\sqrt{3}x^3 + 192\sqrt{2}x^3 - 56x^2 + 8x =$$

$$= (192\sqrt{2} - 216\sqrt{3} + 96)x^3 + (162\sqrt{3} - 160\sqrt{2} - 56)x^2 + (32\sqrt{2} - 27\sqrt{3} + 8)x$$

В результате алгебраических преобразований видно, что это один и тот же полином.

$$L_3(x) = N_3^+(x) = (192\sqrt{2} - 216\sqrt{3} + 96)x^3 + (162\sqrt{3} - 160\sqrt{2} - 56)x^2 + (32\sqrt{2} - 27\sqrt{3} + 8)x$$

4. Вычисление значений интерполяционного полинома и реальных погрешностей интерполяции и сравнение их с оценкой остаточного члена.

Поскольку меньшая из оценок остаточного члена $R_3(f, x_2) < 5{,}612\cdot 10^{-4}$ содержит 10^{-4} порядок, значит вычислять значения полинома следует с точностью 5 знаков после запятой.

- Для точки $x_1 = \dfrac{1}{5}$:

$$L_3(x_1) = N_3^+(x_1) = \frac{192\sqrt{2} - 216\sqrt{3} + 96}{125} + \frac{162\sqrt{3} - 160\sqrt{2} - 56}{25} + \frac{32\sqrt{2} - 27\sqrt{3} + 8}{5} = 1{,}17786$$

Реально:

$$f(x_1) = 2\sin\frac{\pi}{5} = 1{,}17557$$

Погрешность интерполяции:

$$\Delta_1 = \left|2\sin \pi x_1 - L_3(x_1)\right| = \left|1{,}17557 - 1{,}17786\right| = 2{,}29\cdot 10^{-3}$$

Оценка остаточного члена:

$$R_3(f, x_1) < 3{,}247\cdot 10^{-3}$$

Порядки погрешности интерполяции и оценки остаточного члена совпадают.

- Для точки $x_2 = \dfrac{4}{15}$

$$L_3(x_2) = N_3^+(x_2) = \frac{64(192\sqrt{2} - 216\sqrt{3} + 96)}{3375} + \frac{16(162\sqrt{3} - 160\sqrt{2} - 56)}{225} + \frac{4(32\sqrt{2} - 27\sqrt{3} + 8)}{15} = 1{,}48588$$

Реально:

$$f(x_2) = 2\sin\frac{4\pi}{15} = 1{,}48629$$

Погрешность интерполяции:

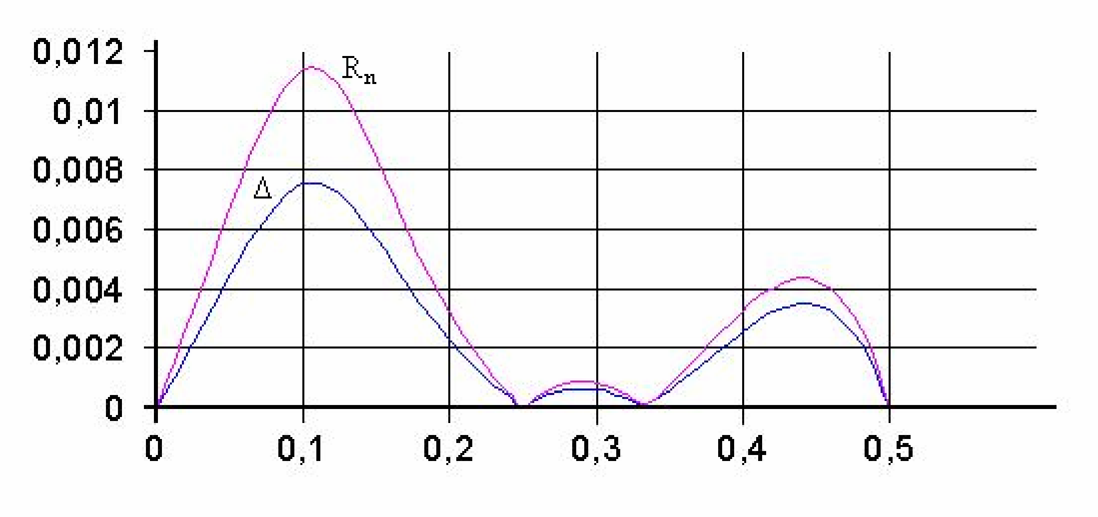
$$\Delta_2 = \left|2\sin \pi x_2 - L_3(x_2)\right| = \left|1{,}48629 - 1{,}48588\right| = 4{,}1\cdot 10^{-4}$$

Оценка остаточного члена:

$$R_3(f, x_2) < 5{,}612\cdot 10^{-4}$$

Порядки погрешности интерполяции и оценки остаточного члена совпадают.

5. **Графическое изображение распределения оценки остаточного члена и реальной погрешности на всем промежутке [0, 1/2].**



Как видно из этого графика реальная погрешность интерполяции Δ всегда меньше оценки остаточного члена R_n.