

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет
Факультет Технической Кибернетики
Кафедра Информационных и Управляющих Систем

КУРСОВАЯ РАБОТА

на тему

**«Решение уравнения
Матье»**

по численному анализу

Работу выполнил студент:

Голубева А. С.
гр. 3084/1

Преподаватель:

Земницкий В. А.

Санкт-Петербург
2005

Постановка задачи.

Во многих задачах, в частности в задачах об устойчивости поперечной колонны, подверженной периодической поперечной нагрузке, о распространении электромагнитных волн в среде с периодической структурой, о движении Луны, а также в задачах о возбуждении некоторых электрических систем встречается уравнение Матье:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)U = 0;$$

$$U(0) = A,$$

$$U'(0) = B,$$

имеющие в зависимости от δ и ε как устойчивые, так и неустойчивые решения. Построить график $U(t)$ и оценить погрешность результата и влияние на точность погрешности исходных данных.

Шаг наблюдения $h = 0.5$ сек.

Исходные данные:

$$\varepsilon = 1.553791 \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx;$$

$$A = 0.5300355 \cdot x^*, \text{ где } x^* - \text{наименьший корень уравнения } x = 1.4^x;$$

$$B = 0, \quad \delta = 1.$$

1. Приведение уравнения Матье к системе дифференциальных уравнений.

Для того, чтобы воспользоваться процедурой RKF45, осуществляющей решение только ОДУ первого порядка, необходимо преобразовать уравнение n -го порядка к системе из n уравнений первого порядка.

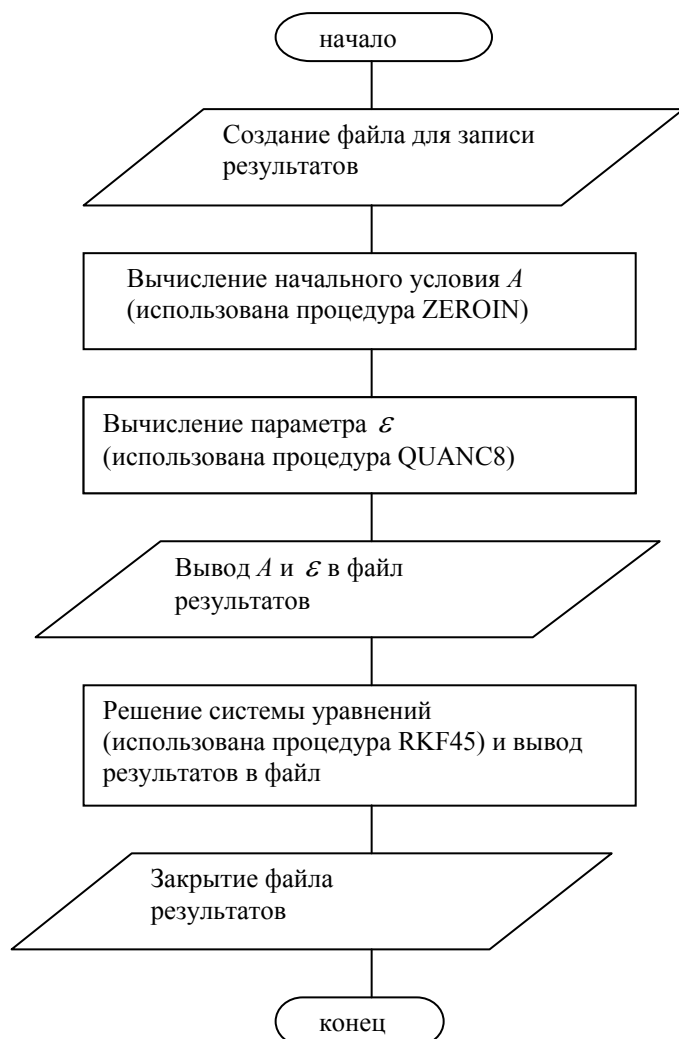
Данное уравнение является уравнением второго порядка, значит, получится система из двух уравнений.

Введу две новых переменных:

$$z_1(t) = U(t), \quad z_2 = U'(t), \text{ тогда система ОДУ будет выглядеть так:}$$

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = -(\delta + \varepsilon \cos 2t)z_1(t) \end{cases}$$

2. Блок-схема алгоритма программы, осуществляющей решение получившейся системы уравнений.



3. Исходный текст программы на языке Pascal.

```
program kursoviki;
uses crt, fmm;

const
    b      = 0.0;
    delta = 1.0;

var
    eps, a : float;
    res: text;

{$F+}
function f1(x: float): float;
begin
    f1 := x - powrr(1.4, x);
end;
```

```

function f2(x:float): float;
begin
  f2 := (sin(x))/(sqr(x)+1);
end;
{$F-}

function aparam(f:pointer):float;
begin
  aparam := 0.5300355 * zeroin(0, 10, 1E-9, f);
end;

function epsparam(f:pointer):float;
var
result, errest, flag: float;
nofun: longint;
begin
  quanc8(f, 0, 1, 1e-9, 1e-9, result, errest, nofun, flag);
  epsparam := 1.553791* result;
end;

{$F+}
procedure f3(t: float; var z, zp: floatvector);
begin
  zp[ 1] := z[ 2];
  zp[ 2] := -(delta + eps * cos( 2 * t)) * z[ 1];
end;
{$F-}

procedure ODESolve(f: pointer);
const neqn = 2;
var
  iflag          : integer;
  work           : rvecn;
  iwork          : ivec5;
  t, tout, relerr, abserr: float;
  y              : floatvector;
begin
  t := 0; iflag := 1;
  y[1] := a; y[2] := b;
  relerr := 1e-6; abserr := 1e-6;
  tout := t;
  repeat
    rkf45(f, neqn, y, t, tout, relerr, abserr, iflag, work, iwork);
    case iflag of
      1, 8: break;
      2   : begin
                writeln(res, tout:10:4, y[1]:10:4, y[2]:10:4, iflag:10);
                tout := tout + 0.5;
              end;
      5   : abserr := 1e-6;
      6   : begin
                relerr := 10 * relerr;
                iflag := 2;
              end;
      7   : iflag := 2;
    end;
  until tout > 20;
end;

```

```

begin
  assign(res, 'res.txt');
  rewrite(res);
  a := aparam( @f1);
  eps := epsparam( @f2);

  writeln(res, 'Parameters:');
  writeln(res, '  A      = ', a :7:4);
  writeln(res, '  epsilon = ', eps:7:4); writeln;
  writeln(res, 'Solution of differential equation'); writeln;
  writeln(res, '      t      U      dU/dt      iFlag'); writeln;
  ODESolve(@f3);
  close(res);
end.

```

4. Решение уравнения Матье при заданных параметрах δ и ε .

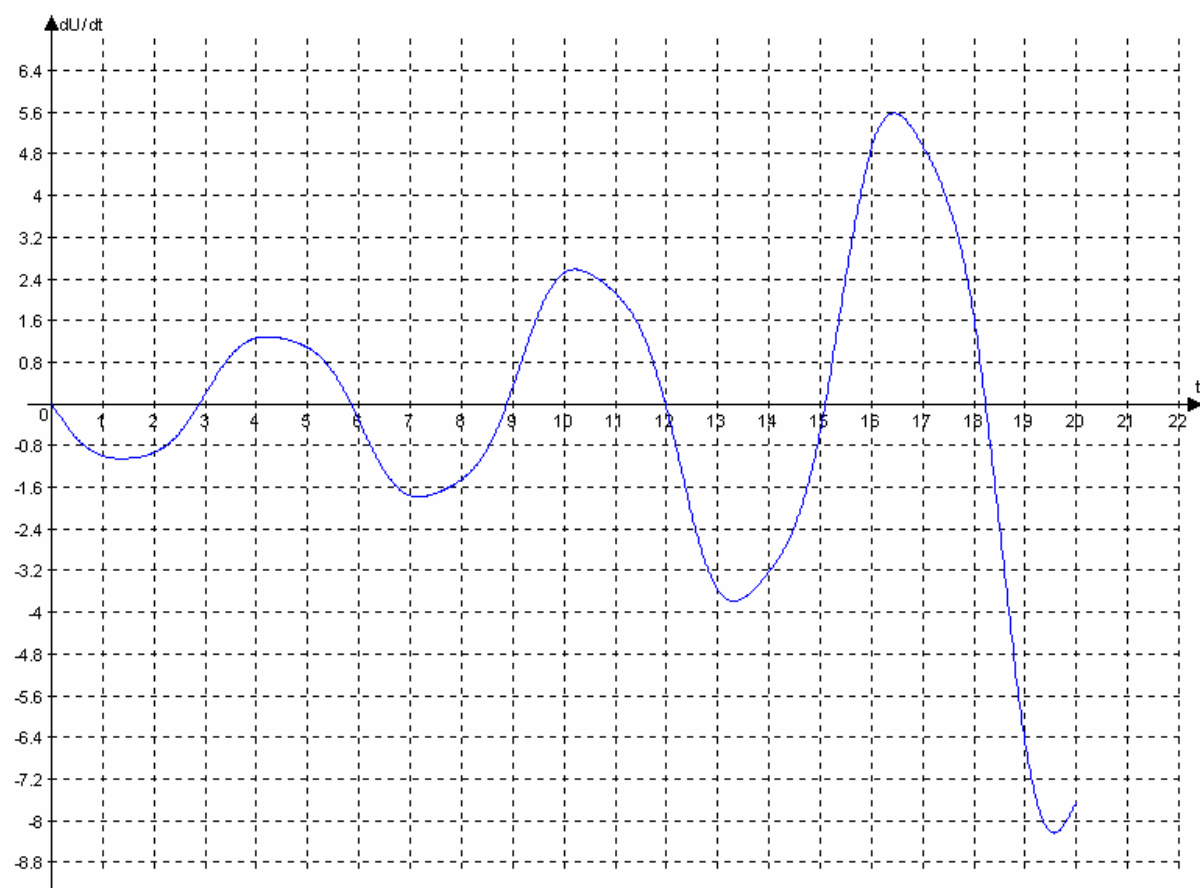
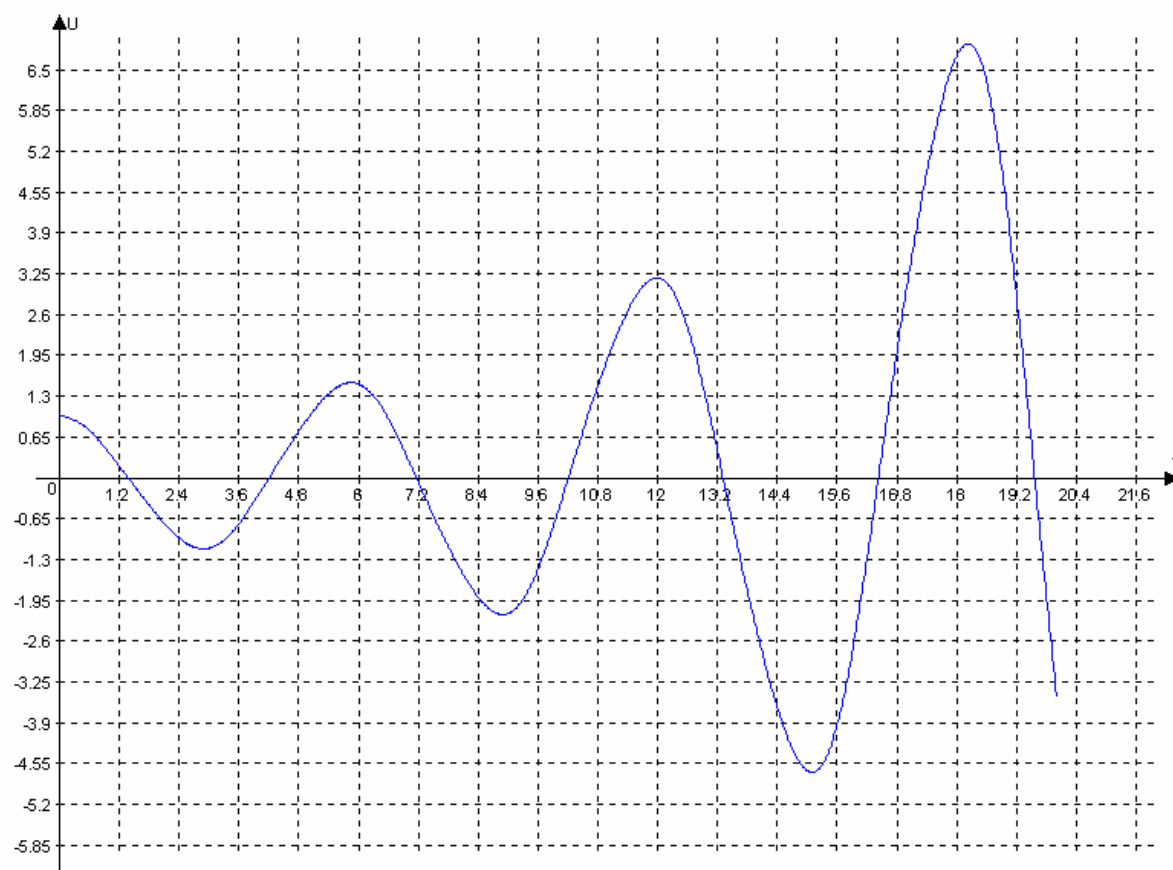
- *Результаты работы программы:*

Найденные начальные данные: $A = 1.0000$, $\varepsilon = 0.5000$

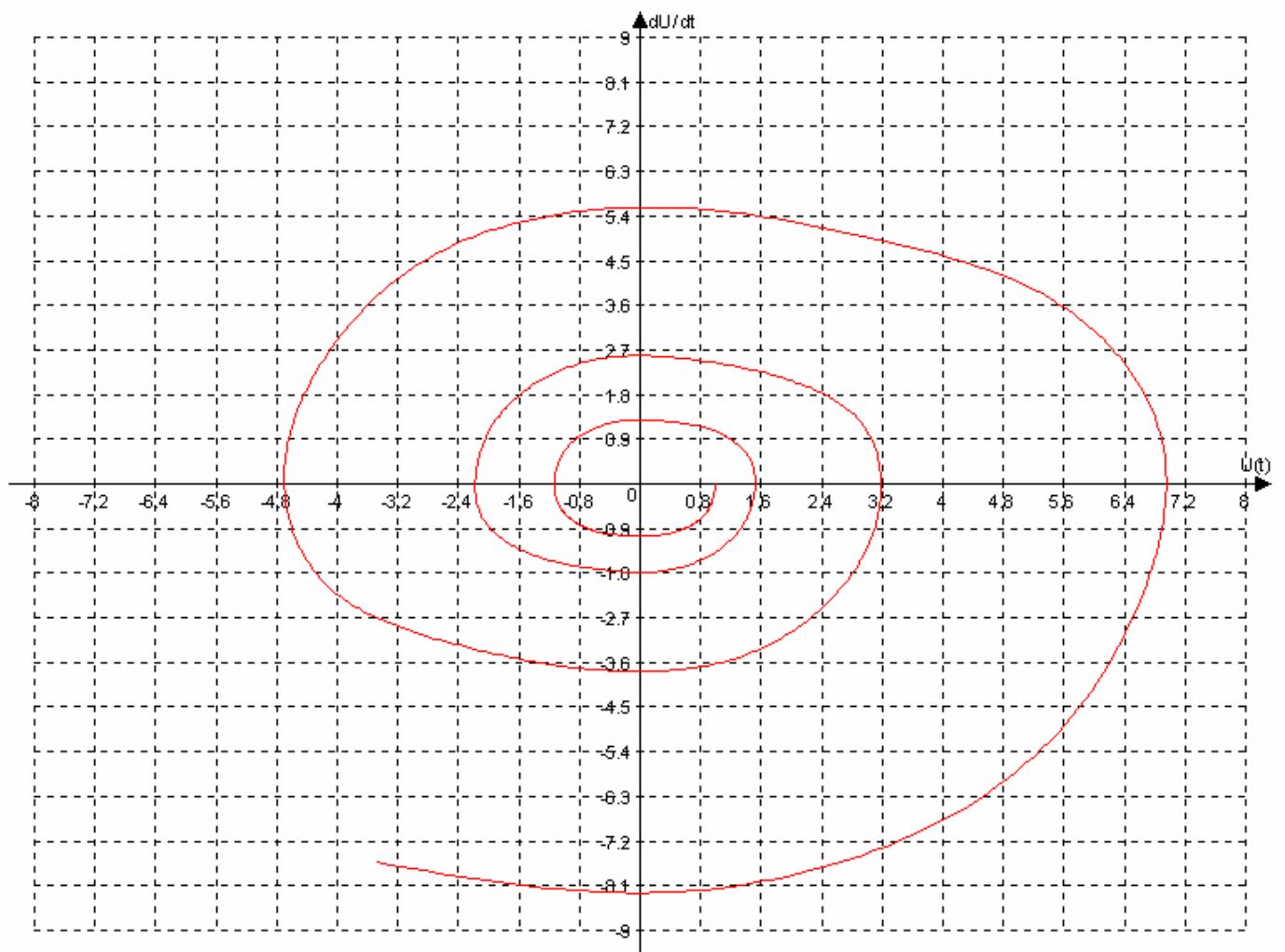
Таблица значений решения системы уравнений:

t	U	dU/dt	iFlag
0.0000	1.0000	0.0000	2
0.5000	0.8229	-0.6693	2
1.0000	0.3903	-0.9988	2
1.5000	-0.1285	-1.0460	2
2.0000	-0.6315	-0.9365	2
2.5000	-1.0189	-0.5507	2
3.0000	-1.1202	0.1882	2
3.5000	-0.8300	0.9283	2
4.0000	-0.2624	1.2659	2
4.5000	0.3771	1.2556	2
5.0000	0.9676	1.0774	2
5.5000	1.4058	0.6039	2
6.0000	1.4936	-0.3143	2
6.5000	1.0794	-1.2954	2
7.0000	0.2885	-1.7604	2
7.5000	-0.5938	-1.7130	2
8.0000	-1.3915	-1.4500	2
8.5000	-1.9929	-0.8722	2
9.0000	-2.1594	0.3058	2
9.5000	-1.6430	1.7246	2
10.0000	-0.5443	2.5166	2
10.5000	0.7337	2.4965	2
11.0000	1.8968	2.1236	2
11.5000	2.8064	1.4228	2
12.0000	3.1836	-0.0683	2
12.5000	2.6338	-2.1391	2
13.0000	1.1563	-3.5651	2
13.5000	-0.7119	-3.7277	2
14.0000	-2.4629	-3.2240	2
14.5000	-3.8832	-2.3631	2
15.0000	-4.6608	-0.5266	2
15.5000	-4.2137	2.4130	2
16.0000	-2.3224	4.9090	2
16.5000	0.3751	5.5703	2
17.0000	3.0342	4.9558	2
17.5000	5.2621	3.8655	2
18.0000	6.7150	1.6583	2
18.5000	6.6041	-2.3484	2
19.0000	4.3369	-6.4890	2
19.5000	0.5367	-8.2180	2
20.0000	-3.4856	-7.6297	2

- Графики функции $U(t)$ и ее производной $U'(t)$:



- Фазовая характеристика:



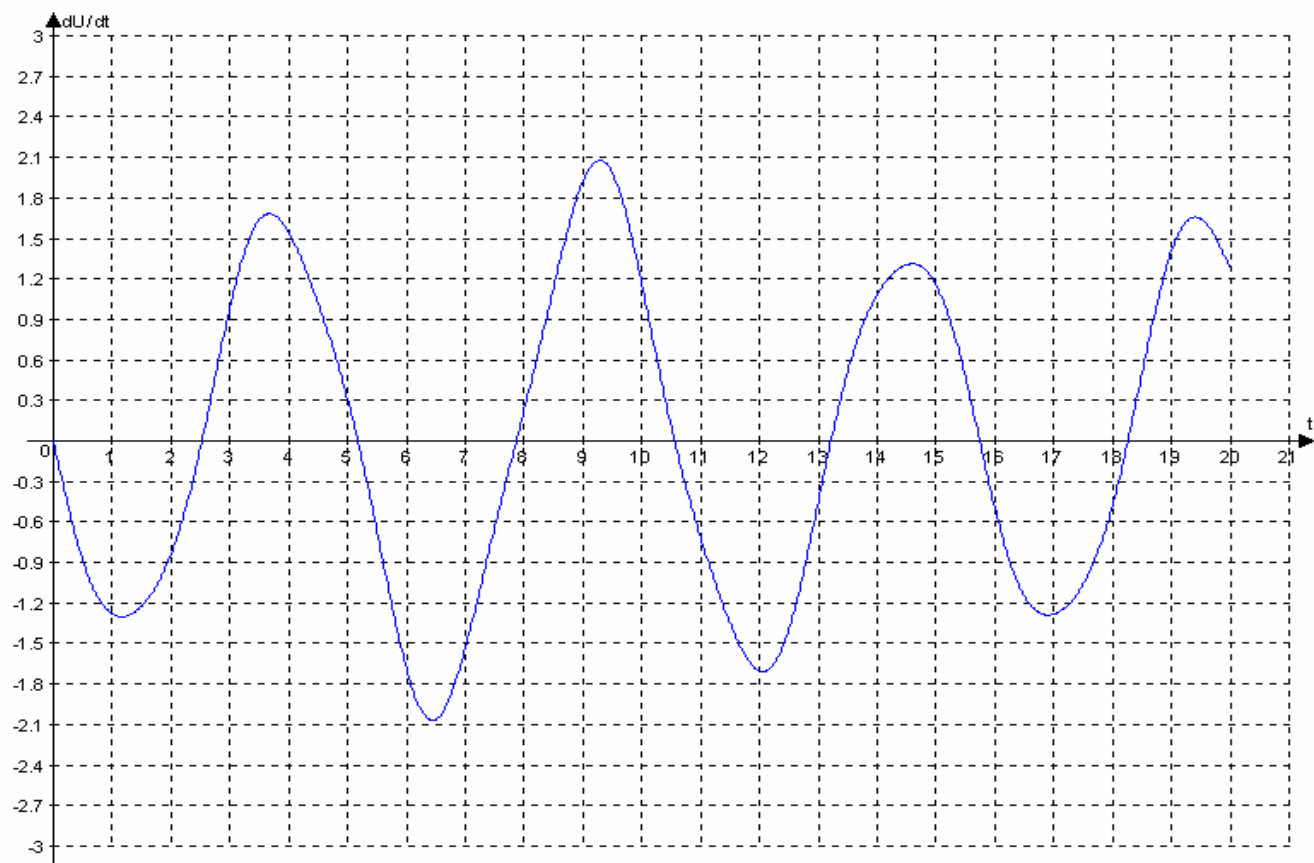
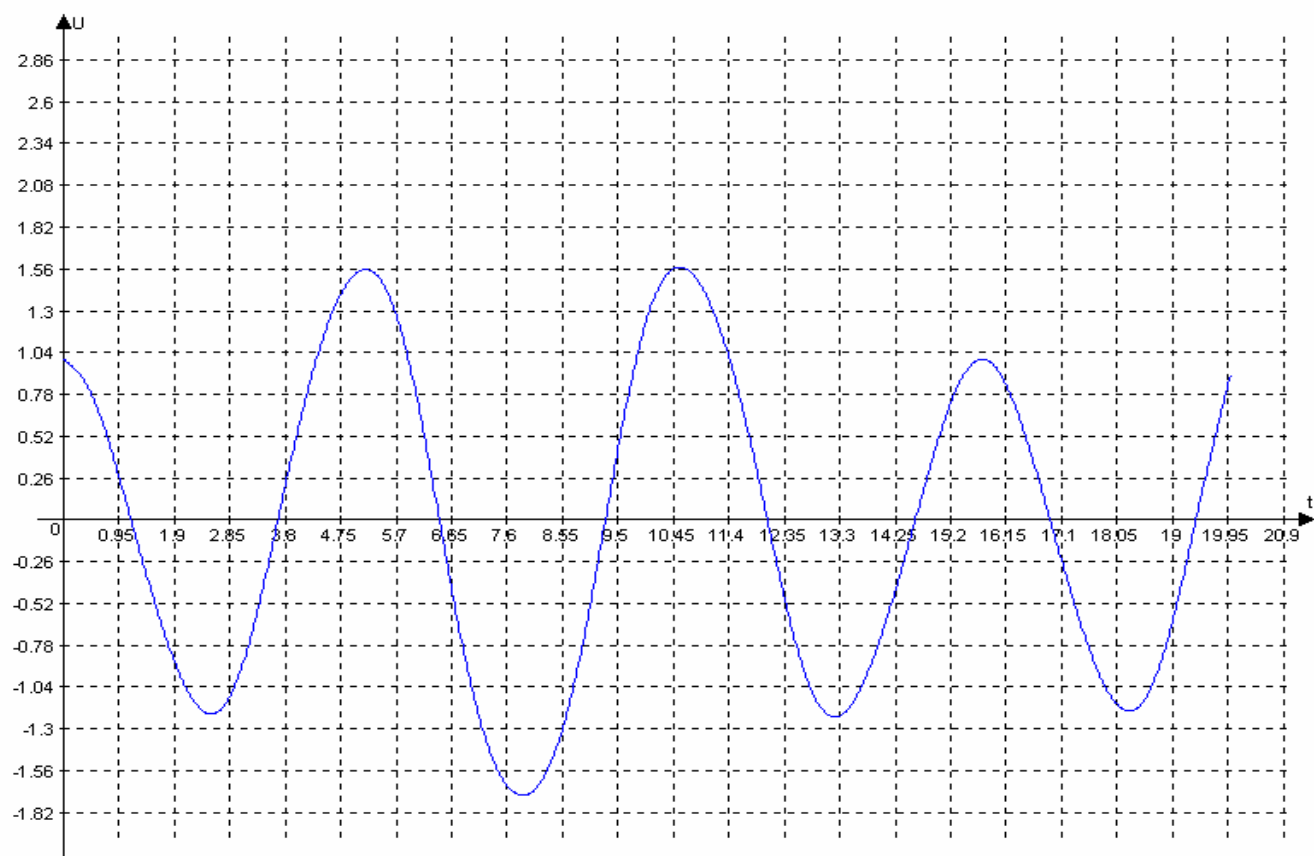
При заданных параметрах δ и ε на графике видно, что функция $U(t)$ представляет собой расходящиеся колебания все большей амплитуды. Это означает, что решение уравнения Матье при данных параметрах неустойчиво. Варьируя параметры δ и ε можно получить устойчивое решение.

5. Решение уравнения Матье при увеличении параметра δ на 50 %.

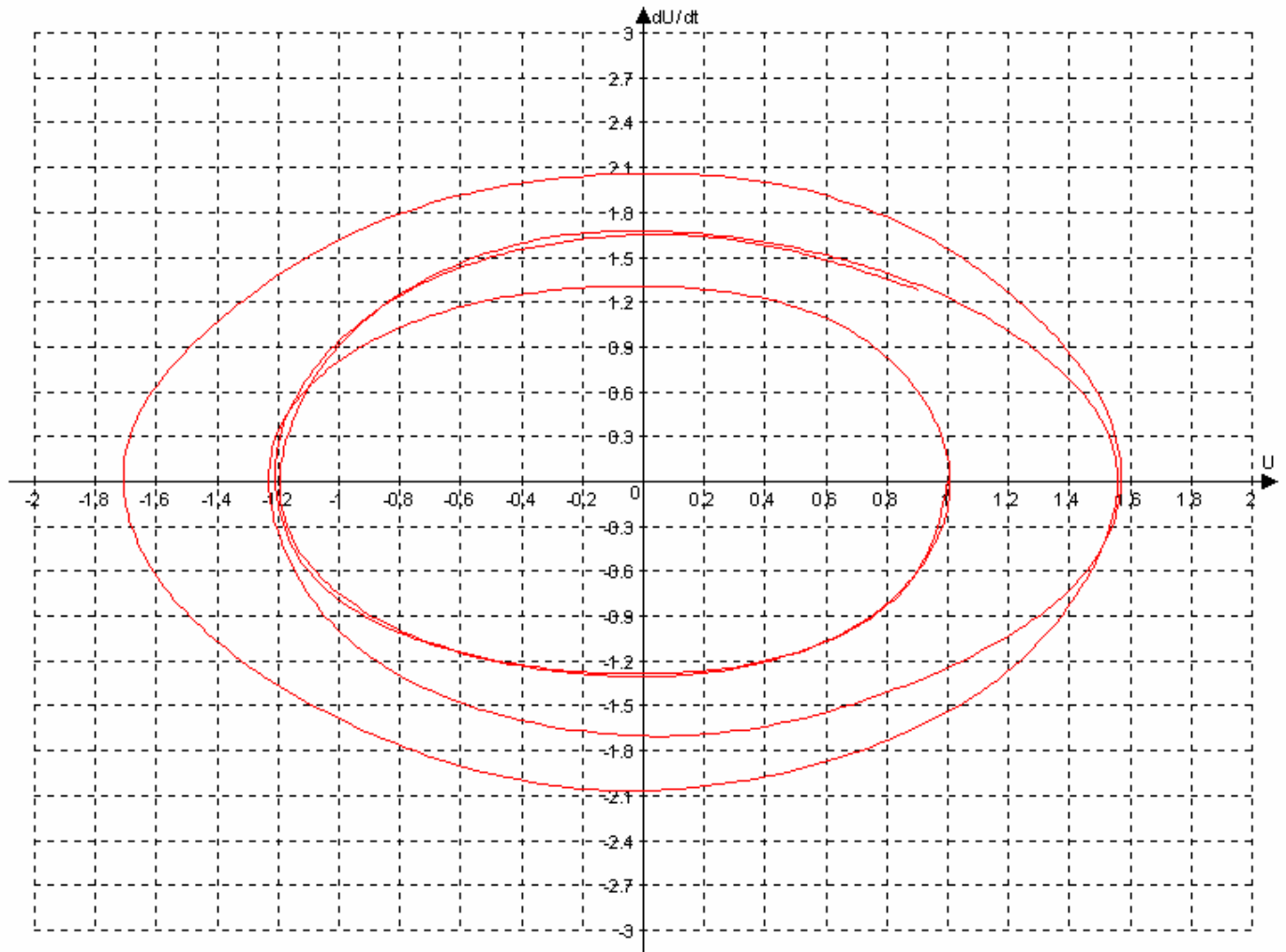
Таблица результатов ($\delta = 1.5$, $\varepsilon = 0.5$):

t	U	dU/dt	iFlag
0.0000	1.0000	0.0000	2
0.5000	0.7647	-0.8857	2
1.0000	0.2002	-1.2798	2
1.5000	-0.4390	-1.2195	2
2.0000	-0.9677	-0.8379	2
2.5000	-1.2076	-0.0493	2
3.0000	-0.9714	0.9900	2
3.5000	-0.2848	1.6381	2
4.0000	0.5383	1.5447	2
4.5000	1.1888	1.0189	2
5.0000	1.5292	0.3091	2
5.5000	1.4522	-0.6634	2
6.0000	0.8531	-1.6883	2
6.5000	-0.1248	-2.0630	2
7.0000	-1.0532	-1.5323	2
7.5000	-1.5977	-0.6363	2
8.0000	-1.6977	0.2310	2
8.5000	-1.3587	1.1368	2
9.0000	-0.5769	1.9248	2
9.5000	0.4420	1.9861	2
10.0000	1.2562	1.1645	2
10.5000	1.5688	0.1059	2
11.0000	1.4055	-0.7149	2
11.5000	0.8849	-1.3430	2
12.0000	0.1047	-1.7021	2
12.5000	-0.7039	-1.3977	2
13.0000	-1.1802	-0.4445	2
13.5000	-1.1488	0.5183	2
14.0000	-0.7318	1.0818	2
14.5000	1.0000	0.0000	2
15.0000	0.7647	-0.8857	2
15.5000	0.2002	-1.2798	2
16.0000	-0.4390	-1.2195	2
16.5000	-0.9677	-0.8379	2
17.0000	-1.2076	-0.0493	2
17.5000	-0.9714	0.9900	2
18.0000	-0.2848	1.6381	2
18.5000	0.5383	1.5447	2
19.0000	1.1888	1.0189	2
19.5000	1.5292	0.3091	2
20.0000	1.4522	-0.6634	2

- Графики функции $U(t)$ и ее производной $U'(t)$:



- Фазовая характеристика:



При увеличении параметра δ на 50% по отношению к заданному на графиках видно, что функция $U(t)$ представляет собой периодические колебания. Это означает, что данное решение уравнения Матье является устойчивым.